अवनी पब्लिकेशन

टॉपर्स द्वारा लिखित

3100+ Golden Question with Solution

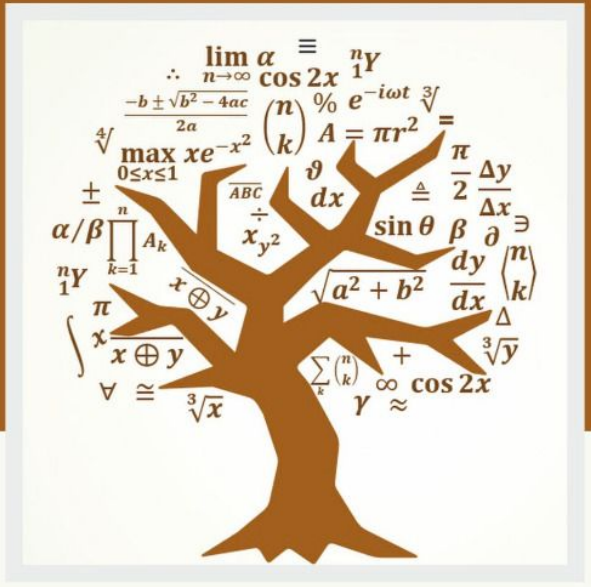
राजस्थान लोक सेवा आयोग अजमेर द्वारा जारी नवीनतम् पाठ्यक्रमानुसार

# वरिष्ठ अध्यापक

## द्वितीय प्रश्न-पत्र

# गणित

## स्नातक स्तर



RPSC Ist Grade | Assistant Professor | M.Sc. Entrance | DSSSB | TGT | PGT

इत्यादि परीक्षाओं के लिए समान रूप से उपयोगी

- विगत परीक्षाओं के प्रश्न-पत्रों का अध्यायवार हल
- 3100+ वस्तुनिष्ठ प्रश्न हल सहित
- परीक्षा की दृष्टि से शॉर्ट ट्रिक्स का सामवेश


**लेखक - नकुल पारीक**

(असिस्टेंट प्रोफेसर)

चार बार राजस्थान टॉपर

# विषय-वस्तु


विवरण ..... पेज नं.

**Chapter 1. समूह सिद्धान्त (Group Theory) ..... 1 - 67**

* विगत परीक्षाओं में आए प्रश्न ..... 32 - 49
* अभ्यास प्रश्न , M.Sc. प्रवेश परीक्षा प्रश्न ..... 49 - 56
* Answer key, संकेत एवं हल ..... 57-67

**Chapter 2. अवकल समीकरण (Differential Equations) ..... 68-163**

* विगत परीक्षाओं में आए प्रश्न ..... 96 - 106
* अभ्यास, M.Sc. प्रवेश प्रश्न ..... 106 -120
* Answer key, संकेत एवं हल ..... 121 - 157
* अभ्यास प्रश्न II ..... 158 - 163

**Chapter 3. अवकलन एवं समाकलन गणित (Calculus) ..... 164- 285**

* विगत परीक्षाओं में आए प्रश्न ..... 215 - 223
* Answer key, संकेत एवं हल ..... 223 - 244
* अभ्यास ,M.sc प्रश्न ..... 245- 257
* Answer key, संकेत एवं हल ..... 258 - 278
* अभ्यास प्रश्न II ..... 279 - 285

**Chaper 4. सदिश कलन (Vector Calculus) ..... 286-340**

*अभ्यास ,M.sc, विगत परीक्षाओं में आए प्रश्न ..... 286-324
* Answer key संकेत एवं हल ..... 325-340

**Chapter 5. समिश्र विश्लेषण (Complex Analysis) ..... 341 - 370**

*अभ्यास ,M.sc, विगत परीक्षाओं में आए प्रश्न ..... 359-364
* Answer key संकेत एवं हल ..... 365-367
* अभ्यास प्रश्न II ..... 367 - 370

**Chapter 6. त्रिविमिय ज्यामिति (3D) ..... 371 - 468**

*अभ्यास ,M.sc, विगत परीक्षाओं में आए प्रश्न ..... 386-390
* Answer key संकेत एवं हल ..... 390-398
* अभ्यास प्रश्न II ..... 398-402

**Chapter - 7.** **स्थिति एवं गति विज्ञान (Statics & Dynamics) ..... 403 - 452**

*अभ्यास,M.sc, विगत परीक्षाओं में आए प्रश्न ..... 420-437

* Answer key, संकेत एवं हल ..... 437 - 452

**Chapter 8.** **वास्तविक विश्लेषण (Real Analysis) ..... 453- 503**

*अभ्यास,M.sc, विगत परीक्षाओं में आए प्रश्न ..... 475-492

* Answer key संकेत एवं हल ..... 493 - 503

**Chapter 9.** **संख्यात्मक विश्लेषण एवं अन्तर समीकरण (Numerical Analysis and Difference Equation) ..... 504 - 550**

*अभ्यास,M.sc, विगत परीक्षाओं में आए प्रश्न ..... 525 - 536

* Answer key, संकेत एवं हल ..... 537 - 545

* विगत परीक्षाओं में आए प्रश्न II ..... 546 - 550

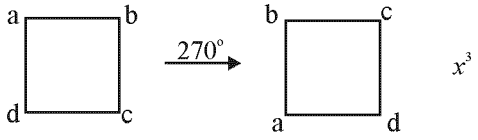
**Chapter 10.** **रैखिक प्रोग्रामन (रैखिक प्रोग्रामन) ..... 551-584**

* विगत परीक्षाओं में आए प्रश्न ..... 570 - 575

* अभ्यास प्रश्न ..... 575-583

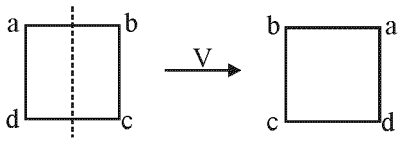
* M.Sc. प्रवेश परीक्षा प्रश्न एवं Answer key ..... 583-584

| वक्र प्राचलिक रूप | ψ | S | पदिक समी. | ρ | क्षेत्रफल | परिक्रमण से जनित | | अन्वालोप | केन्द्रण | अन्य तथ्य |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | | | | | क्षेत्रफल | आयतन | | | |
| (1) $x^{2/3}+y^{2/3}=a^{2/3}$ $x=a\cos^3 t$ $=a\sin^3 t$ (एस्ट्रॉयड, हाइपोक्लॉयड) | - t | $\frac{3a}{2}\sin^2\psi$ | $r^2=a^2-3P^2$ | $3(axy)^{1/3}=3p$ | $\frac{3}{8}\pi a^2$ | $\frac{12\pi a^2}{5}$ (x-अक्ष के परित:) | $\frac{32\pi a^3}{105}$ (x-अक्ष के परित:) | $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$ जहाँ $a^2+b^2=C$ या $x\cos\alpha+y\sin\alpha=c\sin\alpha\cos\alpha$ का अन्वालोप $x^{2/3}+y^{2/3}=c^{2/3}$ | केन्द्रज $(x+y)^{2/3}+(x-y)^{2/3}=2a^{2/3}$ | $(\bar{x},\bar{y})=(a\cos^3\theta+3a\sin^2\cos\theta,$ $a\sin^3\theta+3a\cos^2\theta\sin\theta)$ एस्ट्रॉयड की सम्पूर्ण लम्बाई = 6a एस्ट्रॉयड के केन्द्रज की सम्पूर्ण लम्बाई = 12a नैज समीकरण $p=a\sin\psi\cos\psi$ |
| (2) (i) कार्डियाइड $r=a(1+\cos\theta)$ (ii) $r=a(1-\cos\theta)$ | $\frac{\pi}{2}+\frac{3\theta}{2}$ $\frac{3\theta}{2}$ | $4a\sin\left(\frac{\psi}{3}-\frac{\pi}{6}\right)$ $4a\left(1-\cos\frac{\psi}{3}\right)$ | $r^3=2ap^2$ | $\frac{4a}{3}\cos\left(\frac{\psi}{3}-\frac{\pi}{6}\right)$ $\frac{4a}{3}\sin\frac{\psi}{3}$ $=\frac{2}{3}\sqrt{2ar}$ | $\frac{3}{2}\pi a^2$ $\frac{3}{2}\pi a^2$ | $\frac{32}{5}\pi a^2$ | $\frac{8}{3}\pi a^3$ | | | $\rho_1^2+\rho_2^2=\frac{16a^2}{9}$; $S^2+9\rho^2=16a^2$ ध्रुव से जाने वाली वक्रता जीवा की लम्बाई $=\frac{4r}{3}$ कार्डियोइड की सम्पूर्ण लम्बाई = 8a तथा $\theta=\frac{2\pi}{3}$ पर $r=a(1-\cos\theta)$ का ऊपरी अर्द्ध चाप दो बराबर भागों में बांटता है। $\theta=\frac{\pi}{3}$ या $4r\cos\theta=3a$, $r=a(1+\cos\theta)$ के ऊपरी अर्द्ध चाप को दो बराबर भागों में बांटती है। |
| (3) (i) चक्रज $x=a(\theta+\sin\theta)$ $y=a(1-\cos\theta)$ (ii) $x=a(\theta-\sin\theta)$ $y=a(1-\cos\theta)$ | $\frac{\theta}{2}$ $\frac{\pi}{2}-\frac{\theta}{2}$ | $4a\sin\psi$ $4a(1-\sin\psi)$ | | $4a\cos\psi$ $4a\cos\psi$ | $3\pi a^2$ $3\pi a^2$ | $\frac{64}{3}\pi a^2$ $\frac{64}{3}\pi a^2$ | $\pi^2a^3$ (शीर्ष पर स्पर्श रेखा x-अक्ष) $5\pi^2a^3$ (आधार x-अक्ष से) | | | $\rho_1^2+\rho_2^2=16a^2$ $S^2+\rho^2=16a^2$ सम्पूर्ण लम्बाई = 8a |
| (4) $y^2=4ax$ $(x=at^2,$ $y=2at)$ | $\tan^{-1}\frac{1}{t}$ | $a\log(\tan\psi+\sec\psi)$ $+a\tan\psi\sec\psi$ | $y^2=4a$ $(x+a)$ की $P^2=ar$ | $\frac{2}{\sqrt{a}}$ $(x+a)^{3/2}$ $=\frac{2}{\sqrt{a}}(SP)^{3/2}$ | नाभिलम्ब व परवलय के बीच का क्षेत्र $=\frac{8}{3}a^2$ | शीर्ष पर स्पर्श रेखा के परित: $\pi a^2[3\sqrt{2}-\log(\sqrt{2}+1)]$ x-अक्ष के परित: $\frac{8\pi a^2}{3}(2^{3/2}-1)$ | $\frac{4}{5}\pi a^3$ | $y=mx+\frac{a}{m}$ का अन्वालोप $y^2=4ax$ | $27ay^2=4(x-2a)^3$ | नाभिलम्ब तक कटे भाग की चाप की लम्बाई $2a[\sqrt{2}+\log(1+\sqrt{2})]$ *$y^2=4ax$ व $x^2=4ay$ के बीच का क्षेत्रफल $\frac{16}{3}a^2$ |
| (5) $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ $x=a\cos\theta$ $y=b\sin\theta$ | | | $\frac{1}{p^2}=\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}$ $-\frac{r^2}{a^2b^2}$ | $\rho=\frac{(a^2\sin^2\theta+b^2\cos^2\theta)^{3/2}}{ab}$ $=\frac{(CD)^3}{ab}$ | $\pi ab$ | दीर्घ अक्ष के परित: परिक्रमण से जनित $2\pi ab\left\{\sqrt{1-e^2}+\frac{\sin^{-1}e}{e}\right\}$ | x-अक्ष के परिक्रमण से (दीर्घ अक्ष) $\frac{4}{3}\pi ab^2$ y-अक्ष के परिक्रमण से जनित $\frac{4}{3}\pi a^2b$ (लघु अक्ष) | यदि $a^2+b^2=c^2$ का अन्वालोप $x\pm y=\pm c$ | केन्द्रज $(ax)^{2/3}+(by)^2$ $=(a^2-b^2)^{2/3}$ | $P^2=a^2\cos^2\psi$ $+b^2\sin^2\psi$ |

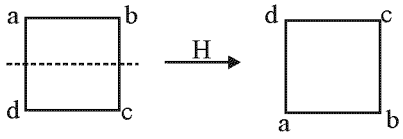



Reflection–

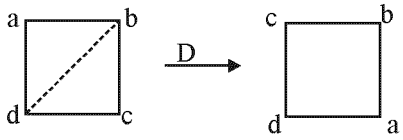
(i)



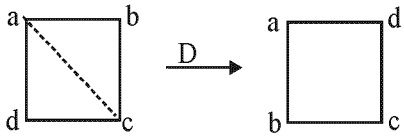

(ii)




(iii)




(iv)




* $D_n$ में प्रसामान्य उपसमूहों की संख्या

$$= \begin{cases} \tau(n)+3 & \text{यदि n सम है} \\ \tau(n)+1 & \text{यदि n विषम है।} \end{cases}$$

उदाहरण– $D_3$ के प्रसामान्य उपसमूहों की संख्या

$= \tau(3)+1 = 2+1 = 3$

$\{e\}, D_3$ एवं $\{e, y, y^2\}$

* **Group Under :** Multiplication Modulo n ($X_n$)

$U(n) = \{x \in Z \mid 1 \le x < n, \gcd(x,n) = 1\}$

अर्थात् वे सभी प्राकृत् संख्याएँ जो n से कम हो तथा उनका n से hcf 1 होगा।

$U(1) = \{1\} = U(2)$

$U(3) = \{1, 2\}$

$U(4) = \{1, 3\}$

**Properties–**

(i) U(n), में अवयवों की संख्या $\phi(n)$ होती है अर्थात् U(n), $\phi(n)$ कोटि का परिमित ग्रुप होता है।

(ii) $n \ge 3$ के लिए U(n) समकोटि का ग्रुप होगा।

(iii) $U(2) \cong \{0\}$

$U(4) \cong Z_2$ व $U(10) \cong Z_4$

$U(2^n) \cong Z_2 \oplus Z_{2^{n-2}}$

$U(P^n) \cong Z_{p^n - p^{n-1}}$ जहाँ p एक विषम अभाज्य है।

* **Product of Groups**– माना G और G' दो ग्रुप है तब * संक्रिया G × G' में निम्न प्रकार परिभाषित है

$(G,0) \times (G',0') = \{(g,g') : g \in G, g' \in G'\}$

s.t. $(g_1, g'_1) * (g_2, g'_2) = (g_1 o g_2, g'_1 o' g'_2) \in G \times G'$

तब G × G', * के लिए ग्रुप है।

Ex. $Z_2 \times Z_2 = \{(0,0),(0,1),(1,0),(1,1)\}$

उपग्रुपों की संख्या व ग्रुप में समान कोटि के अवयवों की संख्या

$K_4 \cong D_2 \cong Z_2 \times Z_2$

| कोटि | अवयवों की संख्या | उपग्रुपों की संख्या |
|---|---|---|
| 1. | 1 | 1{e} |
| 2. | 3 | 3({e, a}, {e, b},{e, c}) |
| 4. | 0 | 1($K_4$) |
| Total | 4 | 5 |

$S_3 \cong D_3$

| कोटि | अवयवों की संख्या | उपग्रुपों की संख्या |
|---|---|---|
| 1. | 1 | 1{e} |
| 2. | 3 | 3({e,(12)},{e,(13)},{e,(23)}) |
| 3. | 2 | 1({e,(1 2 3),(1 3 2)}) |
| 6 | 0 | 1($S_3$ या $D_3$) |
| Total | 6 | 6 |

* r कोटि के उपग्रुपों की संख्या = $\dfrac{r \text{ कोटि के अवयवों की संख्या।}}{\phi(r)}$

जहाँ r | n

$(iii) y = a\sin(x+b)$

**SOL.(i),(ii),(iii)** $diff.eq.\dfrac{d^2y}{dx^2}+y=0$

**2.** $y = a\cos wt + b\sin wt \qquad diff.eq.y'' + w^2 y = 0$

**3.y** अक्ष को मूल बिंदु पर स्पर्श करने वाले सभी वृतों की अवकलसमी

$$2xy\frac{dy}{dx}+x^2-y^2=0 \quad \left[h\,\text{int}\ x^2+y^2-2ax=0\right]$$

**4.** सभी वृतों की अवकल समी जो मूल बिंदु से गुजरती है तथा जिसका केंद्र **x** अक्ष पर है $\left[h\,\text{int}\ x^2+y^2-2ax=0\right]$

**5.**सभी वृतों की अवकल समी जो मूल बिंदु से गुजरती है तथा जिसका केंद्र **y** अक्ष है $\left[h\,\text{int}\ x^2+y^2-2ay=0\right]$

$$\left(x^2-y^2\right)\frac{dy}{dx}-2xy=0$$

**6. xy** समतल में स्थित सभी रेखाओं का अवकल समीकरण

$$\left[h\,\text{int}\ y=mx+c\right] \quad \frac{d^2y}{dx^2}=0$$

**7.**मूल बिंदु से गुजरने वाली सभी सरल रेखाओं का अवकल समीकरण $\left[h\,\text{int}\ y=mx\right]\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{y}{x}$

**8.** मूल बिंदु से इकाई दुरी पर स्थित सभी सरल रेखाओं का अवकल समीकरण $\left[h\,\text{int}\ y=mx\pm\sqrt{1+m^2}\right]$

$$\left(y-x\frac{dy}{dx}\right)^2=1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2$$

**9.** $x^2y=a$ निकाय का अवकल समीकरण $\dfrac{dy}{dx}+2\dfrac{y}{x}=0$

**10.y**–अक्ष के समान्तर अक्ष वाली परवलय का अवकल समीकरण

$$\left[h\,\text{int}(x-h)^2=4a(y-k)\right] \qquad \frac{d^3y}{dx^3}=0$$

10 अवकल समीकरण $xdy-ydx=0$ निरुपित करता है

मूल बिंदु से गुजरने वाली सभी सरल रेखाओं को

11 उस अवकल समी की कोटि जिसका हल $x^2+y^2+2gx+2fy+c=0$ है **ans.** 3

**12. r** त्रिज्या **,y** अक्ष पर केंद्र एवं मूल बिंदु से जाने वाले वृत्त निकाय के अवकल समी की कोटि 1 होगी $\left[h\,\text{int}\ x^2+y^2-2ry=0\right]$

**13.** प्रथम चतुर्थांश में स्थित उन सभी वृत्त निकाय के अवकल समीकरण की कोटि जो निर्देशाक्षों को स्पर्श करते हैं कि कोटि होगी $\left[h\,\text{int}\ x^2+y^2-2ax-2ay=0\right]$ **ans 1**

14 उस अवकल समी की कोटि जिसका हल $y=a\cos x+b\sin x+ce^{-x}$ है **ans.** 3

15 अवकल समी $x\dfrac{dy}{dx}=y-1, y(0)=2$ के हल की संख्या **1** है

**प्रथम कोटि व प्रथम घात की अवकल समीकरण (Differential equations of first order and first degree)**

प्रथम कोटि और प्रथम घात की अवकल समीकरण में $x, y$ और $\dfrac{dy}{dx}$ विद्यमान होंगे, जो यह निम्न में से किसी एक रूप में लिखी जा सकती है

$$\frac{dy}{dx}=f(x,y) \text{ या } f\left(x,y,\frac{dy}{dx}\right)$$

या $f(x,y)\,dx+g(x,y)\,dy=0$

स्पष्टतया यहाँ $f(x,y)$ और $g(x,y)$ चरों $x$ व $y$ के फलन है।

**प्रथम कोटि व प्रथम घात की अवकल समीकरण का हल (Solution of differential equation of first order and first degree)**

समीकरण $\dfrac{dy}{dx}=f(x,y)$ को व्यापक रूप से सीमित संख्या के ज्ञात फलनों में हल करना संभव सदैव नहीं होता। इन अवकल समीकरणों को तभी हल किया जा सकता है जबकि ये कुछ निश्चित मानक रूपों में परिवर्तित हो जायें। यदि दी अवकल समीकरण निम्न में से किसी एक मानक रूप में हो तो हम इसका हल ज्ञात कर सकते हैं।

(i) समीकरण जिनमें चर पृथक् किये जा सकें

(a) $\frac{s}{c}\sqrt{s^2+c^2}$ (b) $s\sqrt{s^2+c^2}$

(c) $s\sqrt{s^2-c^2}$ (d) $\frac{s}{c}\sqrt{s^2-c^2}$

**103.** केटेनरी $y = c\cos h\frac{x}{c}$ की वक्रता, समानुपाती है—**(RPSC I grade 12.1.2020)**

(a) कोटि के (b) कोटि के वर्ग के

(c) कोटि के व्युत्क्रम के (d) कोटि के वर्ग के व्युत्क्रम के

**104.** वक्र $y=f(x)$ के लिये वक्रता बराबर है—

**(RPSC I grade 13.7.2014)**

(a) $\left[1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}} \Big/ \left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)$ (b) $\left[1+\left(\frac{dy}{dx}\right)\right]^{\frac{3}{2}} \Big/ \left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)$

(c) $\left(d^2y/dx^2\right) \Big/ \left[1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}$ (d) $\left(d^2y/dx^2\right) \Big/ \left[1+\left(\frac{dy}{dx}\right)\right]^{\frac{3}{2}}$

**105.** $x$-अक्ष के परित निम्न दीर्घ वृत्त के परिक्रमण से जनित ठोस का आयतन है : $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ **[RAS (Pre.), 1994]**

(a) $\frac{2}{3}\pi a^2 b$ (b) $\frac{2}{3}\pi ab^2$ (c) $\frac{4}{3}\pi a^2 b$ (d) $\frac{4}{3}\pi ab^2$

**106.** निम्न दीर्घाक्ष गोलाभ का आयतन है : $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2+z^2}{b^2}=1$

**[RAS (Pre.), 1999]**

(a) $\frac{3}{4}\pi ab^2$ (b) $\frac{4}{3}\pi ab^2$ (c) $\frac{3}{4}\pi a^2 b$ (d) $\frac{4}{3}\pi a^2 b$

**107.** परवलय $y^2 = 4ax$ का नाभिलम्ब से कटा हुआ भाग शीर्ष पर स्पर्श रेखा के परितः परिक्रमण करने से प्राप्त चर्खी (रील) का आयतन है :**[RAS (Pre.), 1999]**

(a) $\frac{4}{5}\pi a^3$ (b) $\frac{8}{5}\pi a^3$ (c) $\frac{6}{5}\pi a^3$ (d) None

**108.** परवलय $y^2 = 4ax$, $x$-अक्ष सरल रेखा $x = 4$ द्वारा घिरे हुए क्षेत्र को $x$-अक्ष के परित परिक्रमण करने से जनित ठोस का आयतन है : **[RAS (Pre.), 2003]**

(a) $8\pi a$ (b) $16\pi a$ (c) $24\pi a$ (d) $32\pi a$

**109.** $r$ त्रिज्या वाले गोले का पृष्ठीय क्षेत्रफल है:**[RAS (Pre.), 1995]**

(a) $4\pi r$ (b) $4\pi r^2$ (c) $6\pi r$ (d) $8\pi r^2$

## M.Sc. Entrance Questions

**110.** The value of $\Gamma(a)\Gamma(1-a)$ is **[BHU 2014]**

(a) $\sin ax$ (b) $\sin a$ (c) $\frac{\pi}{\sin a\pi}$ (d) $\pi \sin a$

**111.** The sum of $B(m+1,n)$ and $B(m, n+1)$ is **[BHU 2014]**

(a) $B(m,n)$ (b) $B(m+1,\ n+1)$

(c) $B(2m+1,\ 2n+1)$ (d) $2B(m,n)$

**112.** The value of the integral $\int_0^1 x^{m-1}(1-x)^{n-1}dx (m>0;\ n>0)$ is **[BHU 2014]**

(a) $\Gamma(m)+\Gamma(n)$ (b) $\Gamma(m)\Gamma(n)$

(c) $\Gamma(m+n)$ (d) $\frac{\Gamma(m)\Gamma(n)}{\Gamma(m+n)}$

**113.** The value of $\Gamma\left(\frac{7}{2}\right)$ is **[BHU 2012]**

(a) $\frac{15\sqrt{\pi}}{8}$ (b) $\frac{3\sqrt{\pi}}{8}$ (c) $\frac{3\pi}{4}$ (d) $\frac{15}{\pi}$

**114.** The value of $\Gamma(n)\Gamma(1-n)$ is **[BHU 2012]**

(a) $\beta(n,1)$ (b) $\beta(n,\ 1-n)$ (c) $\beta(n,\ 1-2n)$ (d) $\beta(1-n,\ 1-n)$

**115.** The value of $\int_0^1 \frac{x^2}{(1-x^4)^{1/4}}dx \int_0^1 \frac{dx}{(1+x^4)^{1/2}}$ is **[BHU 2012]**

(a) $\frac{\pi}{4\sqrt{2}}$ (b) $\frac{\pi}{2}$ (c) $\frac{\pi}{\sqrt{2}}$ (d) $\frac{\pi}{3\sqrt{2}}$

**116.** The value of $\int_0^1 \frac{x^{m-1}+x^{n-1}}{[1+x]^{m+n}}dx$ is **[BHU 2012]**

(a) $\beta(m,\ n)$ (b) $\beta(m-1,\ n-1)$

(c) $\beta(m-1,n)$ (d) $\beta(m,\ n-1)$

| ***फलन*** $z^n \ \forall\ n \in N$ | ***संततता क्षेत्र*** **C** | **C – R Equation C** | ***अवकलनीयता*** **C** | ***विश्लेषिक*** **C** |
|---|---|---|---|---|
| $\overline{z}$ | C | कहीं भी नहीं | कहीं भी नहीं | कहीं भी नहीं |
| $\|z\|^2 = z\overline{z}$ $= x^2 + y^2$ | C | z = 0 | z = 0 | कहीं भी नहीं |
| Re (z) या $x$ | C | कहीं भी नहीं | कहीं भी नहीं | कहीं भी नहीं |
| Im(z) या y | C | कहीं भी नहीं | कहीं भी नहीं | कहीं भी नहीं |
| $\frac{1}{1-z}$ | C – {1} | C – {1} | C – {1} | C – {1} |
| $xy + iy$ | C | z = $i$ | z = $i$ | कहीं भी नहीं |
| $\frac{\overline{z}^2}{z}$ | C | z = 0 | कहीं भी नहीं | कहीं भी नहीं |
| sin $x$cos$hy$+$i$cos $x$sin$hy$ | C | C | C | C |
| $\sqrt{\|xy\|}$ | C | z = 0 | कहीं भी नहीं | कहीं भी नहीं |
| $e^{-z^{-4}}, z \neq 0, f(0) = 0$ | C | z = 0 | z = 0 पर नहीं | z = 0 पर नहीं |
| \|z\| | C | कहीं भी नहीं | कहीं भी नहीं | कहीं भी नहीं |
| $z^m e^{\pm\frac{1}{z^n}}$ | कहीं भी नहीं | कहीं भी नहीं | कहीं भी नहीं | कहीं भी नहीं |
| $z^m \sin\frac{1}{z^n}$ या $z^m \cos\frac{1}{z^n}$ | कहीं भी नहीं | कहीं भी नहीं | कहीं भी नहीं | कहीं भी नहीं |
| $\frac{\overline{z}}{z}$ | C – {0} | कहीं भी नहीं | कहीं भी नहीं | कहीं भी नहीं |
| sinucos hv+icosusinhv | C | | | z = ±1 पर नहीं |
| sinhucos v+icoshusinv | C | | | z = $\pm i$ पर नहीं |
| $\frac{x^3(1+i)-y^3(1-i)}{x^2+y^2}, \ z \neq 0$ $f(0) = 0$ | C | z = 0 | कहीं भी नहीं | कहीं भी नहीं |
| $\frac{x^3 y(y-ix)}{x^6+y^2}, \ z \neq 0$ $f(0) = 0$ | C | z = 0 | कहीं भी नहीं | कहीं भी नहीं |
| $\frac{x^2 y^5 (x+iy)}{x^4+y^{10}}$, $z \neq 0$ $f(0) = 0$ | C | z = 0 | कहीं भी नहीं | कहीं भी नहीं |

(a) $\frac{x^2}{a}+\frac{y^2}{b}+\frac{z^2}{c}=0$ (b) $fyz+gzx+hxy=0$

(c) $ax^2+by^2+cz^2=0$ (d) $\sqrt{fx}+\sqrt{gy}+\sqrt{hz}=0$

**41. शंकु $ax^2+by^2+cz^2+2fyz+2gzx+2hxy=0$ के तीन परस्पर लम्बवत् जनक रेखाओं का प्रतिबन्ध है—[ACF-19-2-2021]**

(a) $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=0$ (b) $a+b+c=0$

(c) $ab+bc+ca-f-g^2-h^2=0$ (d) $ab+bc+ca=0$

**42. यदि एक लम्बवृत्तीय शंकु की तीन परस्पर लम्बवत् जनक रेखायें हों, तो उसका अर्धशीर्ष कोण है—[ACF-19-2-2021]**

(a) $\tan^{-1}\sqrt{2}$ (b) $\frac{\pi}{2}$ (c) $\tan^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ (d) $\frac{\pi}{4}$

**43. The equation of a right circular cone with vertex at the origin the axis the $z$-axis and semi vertical angle $\frac{\pi}{4}$ is :[UP-PGT]**

(a) $x^2+z^2=y^2$ (b) $y^2+x^2=z^2$ (c) $z^2+y^2=x^2$ (d) $xy=z^2$

**44. The equation $x^2-2y^2+3z^2-4xy+5yz-6zx+8x-19y-2z-20=0$ represents a :[U.K. LT-Grade 8-8-2021]**

(a) sphere (b) cylinder (c) cone (d) None of the above

**45. Find the equation of the cone with vertex at the origin and direction cosines of its generators satisfy the equation $l^2+2m^2-3n^2=0$ [UP-TGT-8-8-2021]**

(a) $x^2+y^2-z^2=0$ (b) $x^2+2y^2-3z^2=0$

(c) $x^2-2y^2+3z^2=0$ (d) $xy+yz+zy=0$

# II Grade Maths 2022

**46. रेखा $\frac{x-1}{1}=\frac{y-2}{3}=\frac{z-3}{4}$ के सभी बिन्दुओं के, गोले $x^2+y^2+z^2=8$ के सापेक्ष ध्रुवी समतल, जिस दूसरी रेखा से गुजरते हैं, उसका समीकरण है-**

(a) $x+2y+3z=8$ $x+3y+4z=0$ (b) $x+2y+3z=4$ $x+3y+4z=0$

(c) $x+2y+3z=8$ $x+3y+4z=2$ (d) $x+2y+3z=2$ $x+3y+4z=0$ **(a)**

**47. पृष्ठ $ax^2+by^2+cz^2=1$ के अन्वालोपी बेलन, जिनके जनक $z$-अक्ष के लम्बवत् है, समतल $z=0$ को मिलते हैं-**

(a) एक परवलय पर (b) एक वृत्त पर (c) एक सरल रेखा पर (d) एक दीर्घवृत्त पर **(a)**

**48. लम्ब वृत्तीय बेलन का समीकरण, जिसका अक्ष $\frac{x}{2}=\frac{y}{3}=\frac{z}{6}$ और त्रिज्या 5 हैं, है-**

(a) $40x^2+45y^2+11z^2-12xy+36yz-24zx-1225=0$

(b) $45x^2+40y^2+13z^2-12xy-36yz-24zx-1225=0$

(c) $45x^2+40y^2+13z^2+12xy-36yz+24zx+1225=0$

(d) $40x^2+45y^2+11z^2+12xy+36yz+24zx+1225=0$ **(b)**

**49. यदि $ax^2+2y^2+bz^2+2axyk-bz-a=0$ गोले की समीकरण हो, तो (a, b, c, k अचर हैं) इसकी त्रिज्या है-**

(a) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ (b) $\frac{\sqrt{17}}{2}$ (c) $\frac{\sqrt{5}}{2}$ (d) $\frac{1}{2}$ **(c)**

**50. एक लम्ब वृत्तीय शंकु के तीन परस्पर लम्ब जनक हैं, तब उसका अर्द्धशीर्ष कोण है-**

(a) $\tan^{-1}\left(\sqrt{3}\right)$ (b) $\tan^{-1}(3)$ (c) $\tan^{-1}\left(\sqrt{2}\right)$ (d) $\tan^{-1}(2)$ **(c)**

**51. बिन्दु (1, –1, 0) से गुजरने वाले उस गोले का समीकरण जो कि गोले $x^2+y^2+z^2+2x-6y+1=0$ को (1, 2, –2) बिन्दु पर स्पर्श करता हो, है-**

(a) $x^2+y^2+z^2+24x-17y-22z=23$

(b) $x^2+y^2+z^2+24x-17y-22z=43$

(c) $x^2+y^2+z^2+24x+17y+22z=43$

(d) $x^2+y^2+z^2-24x-17y-22z=23$ **(b)**

**52. xy– समतल के समान्तर समतल द्वारा, शीर्ष मूल बिन्दु तथा आधार वृत्त $x=a, y^2+z^2=b^2$ वाले शंकु का काटा गया खण्ड है-**

(a) अतिपरवलय (b) परवलय (c) दीर्घवृत्तअअअ(d) वृत्त **(a)**

**53. गोले के केन्द्र O, जिसकी त्रिज्या 3 है, को बिन्दु A (3, 4, 0) से मिलाने वाली रेखा, A के ध्रुवीय समतल को R पर मिलाती है, तब OR बराबर है-**

(a) $\frac{16}{5}$ (b) $\frac{9}{5}$ (c) $\frac{16}{3}$ (d) $\frac{9}{4}$ **(b)**

# I Grade Maths 2022

**54. लम्बवृत्तीय बेलन जिसका निर्देशांक वक्र $x^2+y^2+z^2=4; x+y+z=2$ है, की अक्ष का समीकरण है-**

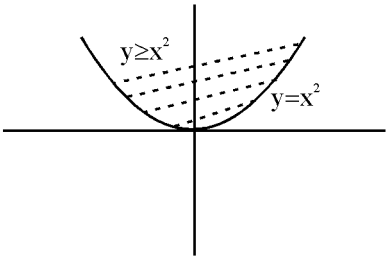
(a) $x=2y=2z$ (b) $2x=y=2z$ (c) $2x=2y=z$ (d) $2x=2y=2z$ **(d)**

**Q. $R^2$ के निम्न उपसमुच्चयों में कौनसा अवमुख समुच्चय है?**

(a) $\{(x,y): y \le x^2\}$ (b) $\{(x,y): |x| \le 5, |y| \ge 10\}$

(c) $\{(x,y): y \ge x^2\}$ (d) $\{(x,y): x^2+y^2=1\}$ **(c)**

Sol. (c)




परवलय के अन्दर का क्षेत्र अवमुख समुच्चय होता है।

**Short Trick –** वृत्त, परवलय, दीर्घवृत्त,गोले,दीर्घवृतज, अतिपरवलय के एक भाग इत्यादि के अन्दर या अन्दर व परिधि का क्षेत्र हमेशा अवमुख होता है।

**अवमुख समुच्चय के उदाहरण**

$(i)\, x^2 + y^2 \le 4$ **(वृत्त)** $(ii)\, \frac{x^2}{6}+\frac{y^2}{10} \le 1$ **(दीर्घवृत्त)**

$(iii)\, y^2 \le 4ax+5$ **(परवलय)**

$(iv)\, x^2 \le 4ay+15$ **(परवलय)**

$(v)\, x^2+y^2+z^2+3x+4y+5z+8 \le 0$ **(गोला )**

$(vi)\, \frac{x^2}{2}+\frac{y^2}{3}+\frac{z^2}{4} \le 1$ **(दीर्घवृतज)**

$(vii)\, x^2-y^2 \ge 1, \quad \forall x,y \ge 0$ **(अतिपरवलय के एक भाग)**

$(viii)\, xy \ge 1, \quad \forall x,y \ge 0$ **(अतिपरवलय के एक भाग)**

**IMP. NOTE:(i)**परीक्षा में **Examiner x,y,z** की जगह $x_1, x_2, x_3$ दे सकता है आपको इन्हे **x,y,z** की तरह मानकर ही हल करना है

**Short trick:**परवलय , वृत्त , दीर्घवृत में अवमुख समुच्चय का पता लगाने के लिए द्विघाती चरों को एक तरफ धनात्मक रूप में लिखते हैं यदि ये द्विघाती चर $\le$ हो तो अवमुख (उत्तल) समुच्चय होगा अन्यथा नहीं

**Ex. 1** $X = \{(x_1,x_2) \mid x_2 - 3 \ge -x_1^2, x_1, x_2 \ge 0\}$

$x_1^2 + x_2 - 3 \ge 0$ अवमुख (उत्तल) समुच्चय

Ex2 $\{(x,y) \mid 3x^2+2y^2 \le 6\}$ अवमुख (उत्तल) समुच्चय

**प्रमेय एवं परिणाम (Theorems and Results) :**

(1) एक अवयव वाला समुच्चय सदैव एक अवमुख समुच्चय होता है।

(2) प्रत्येक अधिसमतल एक अवमुख समुच्चय होता है।

(3) दो अवमुख समुच्चयों का सर्वनिष्ठ भी एक अवमुख समुच्चय होता है।

**अवमुख संचय (covex combination) :**

किसी समष्टि $E^n$ के परिमित बिन्दुओं $x_1, x_2, x_3, \ldots\ldots x_n$ का अवमुख संचय

$$x = \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \lambda_3 x_3 + \ldots\ldots + \lambda_n x_n$$

से परिभाषित बिन्दु होता है,

जहाँ $\lambda_1 + \lambda_2 + \ldots\ldots + \lambda_n = 1;\ \lambda_i \ge 0,\ i = 1,2,\ldots\ldots,n$

या $x = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i$ जहाँ $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 1, \lambda_i \ge 0, i = 1,2,\ldots.n$

जैसे दो बिन्दुओं $x_1, x_2$ का अवमुख संचय $x = \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2$ जहाँ $\lambda_1, \lambda_2 \ge 0,\ \lambda_1 + \lambda_2 = 1$ है।

अर्थात् $x = \lambda x_1 + (1-\lambda)\, x_2,\ 0 \le \lambda \le 1$ जो कि बिन्दु $x_1$ तथा $x_2$ को मिलाने वाली रेखाखण्ड पर स्थित किसी बिन्दु को व्यक्त करता है।

**परिणाम :**

(1) परिमित बिन्दुओं $(x_1, x_2, \ldots\ldots, x_n)$ के सभी अवमुख संचयों का समुच्चय एक अवमुख समुच्चय होता है।

(2) एक रैखिक प्रोग्रामिंग समस्या के सभी सुसंगत हलों का समुच्चय एक अवमुख समुच्चय होता है।

**अवमुख समुच्चय का चरम या सीमान्त बिन्दु (Extreme point of a convex set) :** एक अवमुख समुच्चय $X$ का बिन्दु $\alpha$ चरम बिन्दु कहलाता है। यदि बिन्दु $\alpha$ को $X$ के दो भिन्न–भिन्न बिन्दुओं के अवमुख समुच्चय के रूप में व्यक्त नहीं किया जा सकता हो। अर्थात् $\alpha \in X$ एक चरम बिन्दु है यदि $X$ में ऐसे दो भिन्न $\alpha_1, \alpha_2$ विद्यमान नहीं है जिनके लिए कि $\alpha = \lambda\alpha_1 + (1-\lambda)\alpha_2,\ 0 < \lambda < 1$

**परिणाम :**

(1) निकाय $AX = b$ के सभी सुसंगत हलों के अवमुख समुच्चय का प्रत्येक चरम बिन्दु एक आधारी सुसंगत हल होता है तथा इसका विलोम भी सत्य है।

(2) यदि निकाय $AX = b,\ X \ge 0$ के सुसंगत हलों का अवमुख समुच्चय एक अवमुख बहुफलीय (convex polyhadro) हो तो इसका